なぜ $a+b=b+a$ か

中西 渉 *

2022 年 12 月 26・27 日

1　はじめに

我々は小学校以前の幼い頃から現在にかけて数の概念を取得し，高校生になった今ではかなり複雑な計算もしている。そのベースとなっているのは，幼少期の素朴な体験に基づくものではないだろうか。たとえば $3+2=5$ という計算も，「りんご 3 個とりんご 2 個を合わせると，りんご 5 個になる」というように実物をイメージしたり操作したりして習得してきた。

しかし「りんご 3 個」はあくまでもりんごが 3 個あるという，ものの状態を表しているのであって，「3」そのものを表しているのではない。では実物と切り離された，概念としての「3」とはいったい何なのか。それに対して行う「計算」とはどういうことなのか。この講座ではそういった考察をしていこうと考えている。

2　自然数とは

ここではもっとも基本的な「自然数」から話を始めることにする。そのためには，そもそも自然数とは何か，自然数の加法とは何かといったことをまず定義することから始めなくてはいけない。

よく言われるのは「自然数とは正の整数である」というものであるが，だったらその「整数」とは何なのだろう。自然数を定義する前に整数が定義されているというのは不自然な話ではないだろうか[1]。そこでこの講座では，自然数から順に扱っていくことにする。

2.1　ペアノの公理

自然数は以下に述べる「ペアノの公理」で定義するのが一般的である。

自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は次の (1)〜(5) を満たすものとする。$\mathbb{N}$ の要素を自然数という。

(1) 1 は自然数である。すなわち $1 \in \mathbb{N}$。
(2) $\mathbb{N}$ の任意の要素 n に対し，「後者」と言われる $\mathbb{N}$ の要素が 1 つずつ存在する。これを $S(n)$ と表すことにする。
(3) $\mathbb{N}$ のどの要素 n についても，$S(n)=1$ となることはない。
(4) $\mathbb{N}$ の任意の要素 n, m に対し，$S(n)=S(m)$ ならば $n=m$ である。
(5) n に関する命題 $P(n)$ が次の a)，b) を満たすならば，$\mathbb{N}$ の任意の要素 n について $P(n)$ が成り立つ。
  a) $P(1)$ が成り立つ。
  b) $P(k)$ が成り立つことを仮定すれば，$P(S(k))$ も成り立つ。

* 名古屋高等学校

1） 同様に「実数とは有理数と無理数を合わせたものである」というのも，すごく不思議な説明である。無理数が実数より前に定義されているのだろうか。

(5) がずいぶんややこしいが，これは「数学的帰納法」と言われるものであり，高校の数学でも自然数に関する証明で多用される。高校の数学では主に次のようなフォーマットに則って用いられる。

(1) $n=1$ のときに成り立つ
(2) $n=k$ のときに成り立つと仮定すれば，$n=k+1$ のときも成り立つ

(1) により $n=1$ のときに成り立つことが確定する。すると (2) によって $n=2$ のときも成り立つ。するとまた (2) によって $n=3$ のときも成り立つ。すると…というように，すべての自然数で成り立つことがわかる，ということだ。

大雑把にいうと 1 という最初の要素があり，1 の次の数 $S(1)$，そのまた次の数 $S(S(1))$，そのまた…といった要素だけで構成されるのが $\mathbb{N}$ だということである。ただし $S(1)$ だの $S(S(1))$ だのといった書き方をするとややこしくなるので，$S(1)$ を 2，$S(S(1))$ すなわち $S(2)$ を 3，$S(3)$ を 4，…と表すことにする。

ここで重要なのは，たとえば「1」というものが何ものであるのかといったことについては考えないということである。

注意　日本の高校までの数学では自然数は 1 から始まるが，自然数に 0 を含める考え方もある。筆者は数学基礎論方面出身なので 0 を含める方が馴染みがあるのだが（集合論との親和性が高いため），混乱するといけないのでこの講座では 1 から始まるものとする。なお，その違いは本質的なものではない。

2.2　加法の定義

加法の定義は何通りかあるが，ここでは次の定義を採用するものとする。以下，n などの文字はすべて自然数を表すものとする。

定義　（自然数の加法）

$$n+1=S(n) \tag{2.1}$$

$$n+S(m)=S(n+m) \tag{2.2}$$

以下の証明では，この (2.1)，(2.2) に立ち戻って計算が行われる。

例 1

$3+2=5$ であることを証明しなさい。

証明

$$\begin{aligned} 3+2 &= 3+S(1) \\ &= S(3+1) && \because(2.2) \\ &= S(S(3)) && \because(2.1) \\ &= S(4) \\ &= 5 \end{aligned}$$

□

問 1

$2+3=5$ であることを証明しなさい。

3　なぜ $a+b=b+a$ か

いよいよ本講座の本題である，加法の交換法則 $a+b=b+a$ の証明に入る。しかしその前にいくつかの補助定理（補題）を証明しなくてはいけない。

定理 1　（加法の交換法則）

$a+b=b+a$

補題 1.1

$a+1=1+a$

補題 1.2　（加法の結合法則）

$(a+b)+c=a+(b+c)$

補題 1.3

$a+S(b)=S(a)+b$

証明 （補題 1.1）

(2.1) により $a+1=S(a)$ であるから，$1+a=S(a)$ が成り立てばいい。数学的帰納法を用いる。

(1) (2.1) から $1+1=S(1)$ なので，$a=1$ のとき成り立つ。

(2) $1+k=S(k)$ が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned} 1+S(k) &= S(1+k) && \because (2.1) \\ &= S(S(k)) && \because (2) \text{ の仮定} \end{aligned}$$

となり，$1+S(k)=S(S(k))$ が成り立つ。

(1)(2) により，補題 1.1 は成り立つ。 □

証明 （補題 1.2）

数学的帰納法を用いる。

(1) $(a+b)+1=a+(b+1)$ を示す。

$$\begin{aligned} (a+b)+1 &= S(a+b) && \because (2.1) \\ &= a+S(b) && \because (2.2) \\ &= a+(b+1) && \because (2.1) \end{aligned}$$

(2) $(a+b)+k=a+(b+k)$ が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned} (a+b)+S(k) &= S((a+b)+k) && \because (2.2) \\ &= S(a+(b+k)) \\ & && \because (2) \text{ の仮定} \\ &= a+S(b+k) && \because (2.2) \\ &= a+(b+S(k)) && \because (2.2) \end{aligned}$$

となり，$(a+b)+S(k)=a+(b+S(k))$ が成り立つ。

(1)(2) より補題 1.2 は成り立つ。 □

証明 （補題 1.3）

数学的帰納法を用いる。

(1) $a+S(1)=S(a)+1$ を示す。

$$\begin{aligned} a+S(1) &= a+(1+1) && \because (2.1) \\ &= (a+1)+1 && \because \text{補題 } 1.2 \\ &= S(a)+1 && \because (2.1) \end{aligned}$$

(2) $a+S(k)=S(a)+k$ が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned} a+S(S(k)) &= S(a+S(k)) && \because (2.2) \\ &= S(S(a)+k) && \because (2) \text{ の仮定} \\ &= S(a)+S(k) && \because (2.2) \end{aligned}$$

となり，$a+S(S(k))=S(a)+S(k)$ が成り立つ。

(1)(2) により補題 1.3 が成り立つ。 □

証明 （定理 1）

数学的帰納法を用いる。

(1) 補題 1.1 により $a+1=1+a$ である。

(2) $a+k=k+a$ が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned} a+S(k) &= S(a+k) && \because (2.2) \\ &= S(k+a) && \because (2) \text{ の仮定} \\ &= k+S(a) && \because (2.2) \\ &= S(k)+a && \because \text{補題 } 1.3 \end{aligned}$$

(1)(2) により定理 1 が成り立つ。 □

4　拡張

ここで得られた結果はあくまでも自然数の加法に関する法則である。これの拡張として，次のようなものが考えられるであろう。

4.1　減法・大小関係の定義

自然数では引き算が必ずしもできるとは限らない。大きい数から小さい数を引くことしかできない。それどころか「大きい」「小さい」という関係についてもまだ定義ができていない。

たとえば次のような定義を考えてみる。

定義（自然数の大小関係・減法の定義?）
$a+c=b$ となる自然数 c が存在するとき，$a<b$ と定める。また，c を $b-a$ とする。

この定義がうまくいくためにはいくつかのことを証明しなくてはいけない。たとえば

- $a<b$ と $a=b$ が同時に成り立つことはないか。
- $a<b$ と $b<a$ が同時に成り立つことはないか。
- $a=b$ も $a<b$ も成り立たないとき，必ず $b<a$ が成り立つか。
- $a+c=b$ となる c が存在するとき，それはただ 1 つに定まるか。

あるいは次に述べるように整数まで数を拡張してから引き算を考えてもいいのかもしれない。

4.2　整数への拡張

整数の加法の交換法則を証明するためには，まず整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を定義し，さらにその上での加法を定義する必要がある。

よくある方法は，自然数の対 (a,b) 全体を次の方法でグループ分けして，その各グループを 1 つの整数と考えるというものである。

> (a,b) と (c,d) は $a+d=b+c$ を満たすときに限り同じグループとする

そのようなグループ全体の集合を $\mathbb{Z}$ と考える。このような集合を商集合といい，数学ではよく使われる手法である。

素朴な考えによればこれは，(a,b) の属するグループと整数 $a-b$ を同一視するということである。自然数 a は $(a+1,1)$ の属するグループとして，整数の一部と考えることができる[2]。ここに加法などの演算を更に定義して，いろいろな法則を導くことになる。

4.3　有理数への拡張

有理数の加法の交換法則を証明するためには，まず有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ を定義し，さらにその上での加法を定義する必要がある。

よくある方法は，整数の対 (a,b) 全体（ただし $b\neq 0$）を次の方法でグループ分けして，その各グループを 1 つの有理数と考えるというものである。

> (a,b) と (c,d) は $ad=bc$ を満たすときに限り同じグループとする

そのようなグループ全体の集合を $\mathbb{Q}$ と考える。

これも素朴な考えによれば，(a,b) の属するグループと有理数 $\dfrac{a}{b}$ を同一視するということである。整数 a は $(a,1)$ の属するグループとして，有理数の一部と考えることができる。ここに加法などの演算を更に定義して，いろいろな法則を導くことになる。

4.4　実数への拡張

自然数から整数，整数から有理数というように数の範囲を拡張してきた。それもよく似た手法によってであった。ところが実数はそう簡単にはいかない。ここまで 2 つの自然数で 1 つの

2）自然数に 0 を含めていれば，ここは $(a,0)$ の属するグループというふうに簡単に表せる。

整数，2 つの整数で 1 つの有理数を定義してきたが，実数を 1 つ定義するには無限の有理数を必要とするので本質的に難しい。

$\sqrt{2}$ や π などの無理数は簡単に導入されたように思われるかもしれないが，実はそういった「有名」な無理数はほんの一部でしかない。ほとんどの無理数は特別な性質を持たないため，それを有理数で表そうとすると無限が必要になるのである。高校数学で導入される虚数について，よく「実際には存在しない数」という言い方がされるが，実は実数の方が相当の無理をして導入されているのだ。クロネッカーが「円周率（あるいは超越数）は存在しない」と言ったのも，このような面からの彼の信念だったのだろう。

4.5　なぜ $a \times b = b \times a$ か

まず自然数について証明することになるが，その前にまず乗法を定義する必要がある。

問 2

自然数の積を定義しなさい（既に定義されている和は用いて良い）。

$$n \times 1 = \tag{4.1}$$

$$n \times S(m) = \tag{4.2}$$

問 3

任意の自然数に対して次の法則が成り立つことを証明しなさい（既に証明されている和の性質は用いて良いし，いくつかの補題も必要になるだろう）。

$$a \times b = b \times a \tag{4.3}$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \tag{4.4}$$

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \tag{4.5}$$

5　余談

せっかくなので，自然数に関わる有名な問題について触れておく。

5.1　Bertrand–Chebyshev の定理

素数に関する有名な定理がある。

定理 2（Bertrand–Chebyshev の定理）

任意の自然数 n に対し，$n < p \leqq 2n$ を満たす素数 p が存在する。

これはベルトランの仮説にチェビシェフが証明を与えたものである。チェビシェフの証明はガンマ関数を用いた高度なものであったが，のちにポール・エルデシュが高校数学の範囲での証明を与えた（当時彼自身高校生であった）。筆者は『教室に電卓を!』（一松信著）に掲載されていたその証明に感銘を受けた。

5.2　Collatz の予想

コラッツの予想（コラッツ・角谷予想）は非常に有名なものである。実は期末テストの問題 II(5) のフローチャートはこれがネタである。

予想 3（Collatz の予想）

任意の自然数から始めて，次の操作を繰り返すと有限回で必ず 1 になる。

- それが偶数なら 2 でわる
- それが奇数なら 3 倍して 1 を足す

たとえば 7 で始めると $7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$ という具合だ。かなり大きい数までの範囲まで例外がないことが確認されているが，証明はされていない。とはいえ取り組んでいる人は多く，いろいろな結果が得られているようではある。筆者自身は小学生の頃これを知ったものの，当時は「証明されていない」ということの真意がわからなかった。

5.3 Goodstein の定理

グッドスタインの定理はそれ自体かなりややこしいものであり，成立することのイメージを作ることも難しいのだが，非常におもしろい内容を含んでいる。

定理を述べる前の準備として「n を超基底として整数を表現する」という操作を定義しておくことにする。例として，2 を超基底として 23 を表すと次のようになる：

> 2 進法で 23 を表現すると $2^4+2^2+2^1+1$ となる。この指数（あるいは指数の指数，そのまた指数…）に 2 より大きい数が現れないように，それらをすべて 2 進法で表現する。つまり 23 は $2^{2^2}+2^2+2^1+1$ と表される。

同様にたとえば 514 を 2 を超基底として表すと，$514=2^9+2^1=2^{2^3+1}+2^1=2^{\{2^{(2+1)}+1\}}+2^1$ となる。

定理 4 （Goodstein の定理）

次の操作を続けると，有限回で必ず 1 になる。

(1) 任意の自然数をとる
(2) その数を，2 を超基底として表現する
(2')そこに現れる 2 をすべて 3 に置き換えてから 1 を引く
(3) その数を，3 を超基底として表現する
(3')そこに現れる 3 をすべて 4 に置き換えてから 1 を引く
(4) その数を，4 を超基底として表現する
(4')そこに現れる 4 をすべて…
…

具体的には次のようになる。たとえば 4 から始めると次のようになり，これをずっと繰り返すといつかは 1 になるというのである。断っておくが，この続きを実行しようと考えてはいけない。1 になるまでの回数は 10 億桁くらいになるのだから。

$$4=2^2 \qquad \text{2 を超基底として表す}$$
$$\to 3^3-1=26 \qquad \text{2 を 3 に置き換えて 1 を引く}$$
$$26=2\cdot 3^2+2\cdot 3^1+2\cdot 3^0 \qquad \text{3 を超基底として表す}$$
$$\to 2\cdot 4^2+2\cdot 4^1+2\cdot 4^0-1=41 \qquad \text{3 を 4 に置き換えて 1 を引く}$$
$$41=2\cdot 4^2+2\cdot 4^1+4^0 \qquad \text{4 を超基底として表す}$$
$$\to 2\cdot 5^2+2\cdot 5^1+5^0-1=60 \qquad \text{4 を 5 に置き換えて 1 を引く}$$
$$\cdots$$

この定理がおもしろいのは，どう見ても整数に関する定理でありながら，整数論では証明も反証もできないことが証明されているという点である[3)]。1981 年にカービーとパリスによって，グッドスタインの定理が正しければペアノの公理からなる整数論の無矛盾性が示せることが証明された。したがって Gödel の第二不完全性定理により，ペアノの公理からなる整数論ではグッドスタインの定理は証明できないことがわかる。

6 おわりに

筆者自身は高校生の頃『解析概論』（高木貞治著）を読む中で実数の定義に出会い，数や計算がどのように定義されていくのかということについて興味を持った。この講座で考えたことが，数学を楽しむ上で何かの意味を持てば幸いだと考えている。

3） 定理の証明は集合論などを用いれば可能。